Sistem cartezian definitie. Coordonate carteziene

Sistem cartezian – definiţie

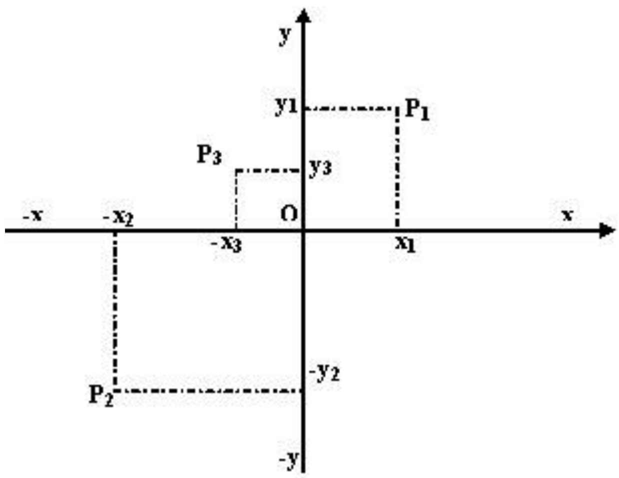
Un sistem cartezian de coordonate (coordonatele carteziene) reprezintă un sistem de coordonate plane ce permit determinarea unică a poziţiei unui punct P1 dintr-un plan. Un sistem cartezian este compus din două drepte perpendiculare x şi y, denumite axele sistemului de coordonate.

Intersecţia celor două axe formează originea sistemului de coordonate carteziene, notată O. Cele două axe se notează Ox – axa orizontală şi Oy – axa verticală. Punctul P1 este conţinut în planul xOy determinat de cele două axe.

Prin convenţie, fiecărei axe i se atribuie un sens pozitiv şi un sens negativ.

Sensul pozitiv al **axei Ox** este considerat a fi în dreapta **axei Oy** iar sensul negativ la stânga acesteia.

Similar, sensul pozitiv al **axei Oy** este considerat a fi deasupra **axei Ox** iar sensul negativ sub aceasta.



Sistem cartezian. Sistemul de coordonate carteziene

Într-un **sistem cartezian**, poziţia punctului **P_1** se determină prin ducerea unei **perpendiculare** din acesta pe fiecare din cele două axe.

Intersecţiile perpendicularelor cu **axele x**, respectiv **y se notează X_1 şi Y_1.** Valoarea distanţei **(notată x_1)**, măsurate pe **axa X** între originea sistemului de coordonate carteziene (**O**) şi punctul **X_1,** reprezintă **abscisa** punctului **P_1**.

Valoarea distanţei **(notată y_1)**, măsurate pe axa **Y** între originea sistemului de coordonate carteziene (**O**) şi punctul **Y_1,** reprezintă **ordonata** punctului **P_1**.

Coordonatele carteziene ale punctului **P_1** în sistemul de coordonate **xOy** sunt reprezentate de perechea de numere (**x_1, y_1**):

P_1(**x_1, y_1**)

Sistem cartezian – utilizare

Una din cele mai răspândite utilizări ale sistemelor carteziene este reprezentarea grafică a variaţiei unei funcţii. În această situaţie, pe **axa Y** este reprezentată valoarea funcţiei, **f(x)** calculată pentru valorile lui **x** de pe axa **X**.

Sistemele de coordonate carteziene mai sunt folosite în **sistemele digitale de afişaj** (monitoare, display-uri de smartphone, sisteme de afişaj stradal etc.). Imaginile sau textul ce urmează a fi afişat este stocat în memorii **RAM** sub forma unor matrici Wxh unde **W** este lăţimea ecranului pe care urmează să se afişeze în pixeli, iar h este înălţimea acestuia în pixeli. Orice pixel de pe ecranul respectiv este definit de coordonatele carteziene **(x,y)**, unde x reprezintă coordonata orizontală, iar y reprezintă coordonata verticală.
Centrul sistemului de coordonate este în colţul stânga sus al ecranului. Pentru afişarea unui punct de **coordonate (x,y)**, se citeşte valoarea locaţiei de memorie corespunzătoare acestor coordonate.

1. MULŢIMI

Definiţia mulţimii.

Definiţia 1.1. (Cantor) Prin *mulţime* înţelegem o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte. Obiectele din care este constituită mulţimea se numesc *elementele* mulţimii. Două mulţimi sunt *egale* dacă ele sunt formate din exact aceleaşi elemente.

Notaţia 1.2. Dacă x este un obiect şi A este o mulţime, vom nota

- $x \in A$ dacă x este element al lui A;
- $x \notin A$ dacă x nu este element al lui A.

Observaţia 1.3. Două mulţimi A şi B sunt egale dacă şi numai dacă are loc echivalenţa $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Moduri de a defini o mulţime:

- *sintetic*, prin enumerarea elementelor mulţimii, e.g. $A = \{0, 1\}$;
- *analitic*, cu ajutorul unei proprietăţi ca caracterizează elementele mulţimii:

$$A = \{x \mid x \text{ are proprietatea P}\}$$

e.g. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\}$.

Mulţimi importante.

- Mulţimea numerelor naturale:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

- Mulţimea numerelor întregi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n-1, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

- Mulţimea numerelor raţionale

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \left(\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow aq = pb \right) \right\}$$

- Mulţimea numerelor reale: $\mathbb{R}$
- Mulţimea numerelor complexe: $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Mulţimea vidă $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.

Graficul unei functii si reprezentarea geometrica a graficului

Definitie. Functia de tipul $f : R \to R,\ f(x) = ax + b$, unde $a, b \in R$ se numeste functia liniara.

Daca $a \neq 0$, atunci functia $f : R \to R,\ f(x) = ax + b$, se numeste functia de gradul I.

Reprezentarea geometrica a graficului unei functii liniare este o dreapta.

Distingem trei cazuri pentru functia de gradul I

1. Daca $a \neq 0$ si $b = 0$, atunci functia $f(x) = ax$, are ca reprezentare geometrica o dreapta care contine originea sistemului de coordonate.

2. Daca $a = 0$ si b, functia liniara $f(x) = 0$ este functia constant nula, a carei reprezentare geometrica este axa Ox.

3 Daca $a = 0$ si $n \neq 0$, atunci functia $f(x) = ax$, are ca reprezentare geometrica o dreapta care este paralela cu axa Ox.

<u>Intersectia graficului unei functii de gradul I cu axele de coordonate:</u>

Intersectia cu axa Ox

$G_f \cap Ox$ calculam

$f(x) = 0$ si are axele de coordonate $A\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ Deci avem: $G_f \cap Ox = A\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Intersectia cu axa Oy

$G_f \cap Oy$ calculam $f(0) = b$
$G_f \cap Ox = A(0, b)$. si are axele de coordonate $A(0, b)$ Deci avem:

Exercitiu :

1) Reprezentati grafic functiile:

$f : R \to R, f(x) = x + 1$

Solutie :

Calculam mai intai

$G_f \cap Ox$, astfel avem:

$f(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Astfel am gasit $A(-1, 0)$

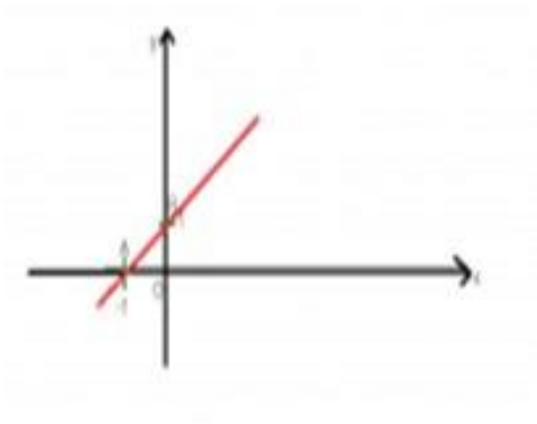
Calculam acum :

$G_f \cap Oy$, astfel calculam:

$f(0) = 1$

Deci am gasit $G_f \cap Oy = B(0, 1)$

Astfel reprezentarea geometrica a functiei este:



Observam ca graficul functiei este o dreapta, care contine cele doua puncte.

b) $f : R \to R, f(x) = 2x$

Calculam mai intai :

$G_f \cap Ox$, astfel avem:

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Astfel am gasit $G_f \cap Ox = A(0, 0)$

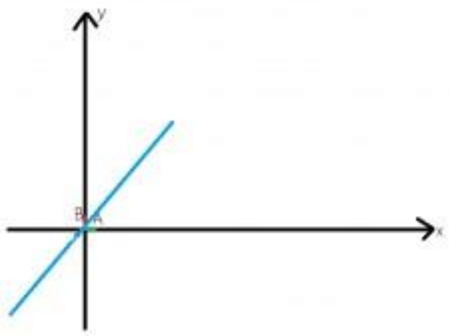
Calculam acum

$G_f \cap Oy$, astfel calculam:

$f(0) = 0$

Deci am gasit $G_f \cap Oy = B(0, 0)$

Astfel reprezentarea geometrica a functiei este:



2) Determinati numarul real m pentru care punctul $A(2; -3)$ apartine graficul
$f : R \to R, f(x)(m-5)x + 11$

functiei
Solutie:
Ca sa gasim numarul real m pentru care punctul A apartine graficului functiei calculam:

.

3) Fie functia $f : R \to R, f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$

a) Reprezentati grafic functia

b) Calculati aria triunghiului determinat de graficul lui f si axele de coordonate

c) Determinati distanta de la originea sistemului de axe perpendiculare xOy la graficul functiei f.

Solutie:

a)Calculam mai intai

$G_f \cap Ox$, astfel avem:

Astfel am gasit $G_f \cap Ox = A(3,0)$

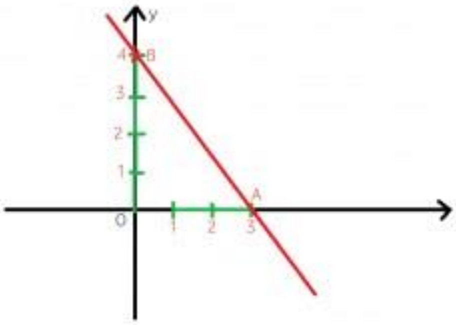
Calculam acum

$G_f \cap Oy$, astfel calculam:

$f(0) = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 4 \Rightarrow f(0) = 4$

Deci am gasit $G_f \cap Oy = B(0,4)$

Astfel reprezentarea geometrica a functiei este:



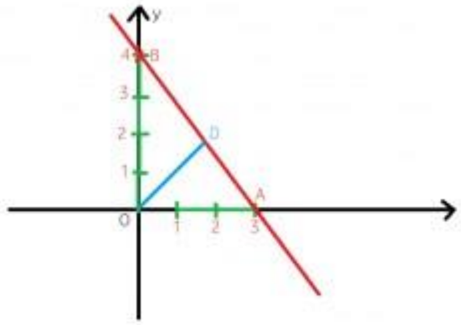
Astfel dupa ce am reprezentat geometric o functie calculam aria.
Dupa cum bine observati triunghiul AOB este dreptunghic in O, dar acum trebuie sa aflam lungimea segmentelor AO si BO, astfel
$a(4,0); O(0,0)$

Acum ca sa aflam distanta de la O la B, stim ca $B(0,4)$
Astfel

Deci am gasit ca AO=3 cm si BO=4 cm.
Acum aplicam formul ariei pentru triunghiul dreptunghic si gasim:
$A_{\Delta AOB} = \frac{c1 \cdot c2}{2} = \frac{AO \cdot BO}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6cm^2$

c) $d(O, G_f) = d(O, AB) = AD$

Deoarece stim ca distanta de la un punct la o dreapta este piciorul perpendicularei din punctul dat pe dreapta.



Astfel stim ca Triunghiul AOB dreptunghic aplicam **Teorema inaltimii**, dar mai intai aflam AB, astfel in triunghiul AOB aplicam**Teorema lui Pitagora**

$AB^2 = AO^2 + BO^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AB = \sqrt{9+16} \Rightarrow AB = \sqrt{25} \Rightarrow$
$AB = 5cm$.

Astfel

$AD = \frac{c1 \cdot c2}{ipotenuza} = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4cm$

Graficul unei functii de gradul al II lea

Astfel consideram functia

$f : R \rightarrow R, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in R, a \neq 0$

Pentru reprezentarea geometrica a graficului functiei de gradul al doilea se parcurg urmatorii pasi:

1. Se calculeaza mai intai punctul de intersectie cu axele de coordonate:

a) $G_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$

Se rezolva ecuatia de gradul al doilea $f(x) = 0$

Daca $\Delta > 0$ punctele de intersectie sunt $A(x_1, 0)$ si $B(x_2, 0)$ unde x_1, x_2 sunt solutiile reale ale ecuatiei de mai sus.

Daca $\Delta = 0$ punctul de intersecite este $A\left(\frac{-b}{2 \cdot a}, 0\right)$

Daca $\Delta < 0$ nu existe puncte de intersectie. In acest caz graficul functiei este deasupra axei Ox, daca a>0 si graficul functiei este dedesubtul axei Ox, daca a<0.

b) Se calculeaza $G_f \cap Oy = \{C(0, c)\}$

2.Punctul de extrem al graficul functie este $V\left(\frac{-b}{2 \cdot a}, \frac{-\Delta}{4 \cdot a}\right)$

$a > 0$ Daca , punctul V este punct de minim
$a < 0$ Daca , punctul V este punct de maxim.

3. Curba G_f este simetric fata de dreapta $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$

4. Multimea valorilor functiei f este:

Daca a>0 $Imf = \left[-\frac{\Delta}{4 \cdot a}, +\infty\right)$

Daca a 5. Aspectul geometric al curbei este:

$a > 0$ Daca , aspectul este convex
$a < 0$ Daca , aspectul este concav

Exemplu:

1) Sa se reprezinte grafic functia $f : R \to R$ in cazul

a) $f(x) = x^2 - 4x - 12$

Observam mai intai ca in cazul ecuatiei de mai sus a=1, b=-4, c=-12

$G_f \cap Ox = \{A(6,0), B(-2,0)\}$

1. Calculam, mai intai $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{4 \cdot a} = \frac{4+\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Astfel avem $A(6,0)$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{4 \cdot a} = \frac{4-\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{4-8}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$B(-2,0)$

Rezolvam ecuatia Astfel avem:

si avem Acum calculam

$G_f \cap Oy = \{C(0,-12)\}$

$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 12 = -12$

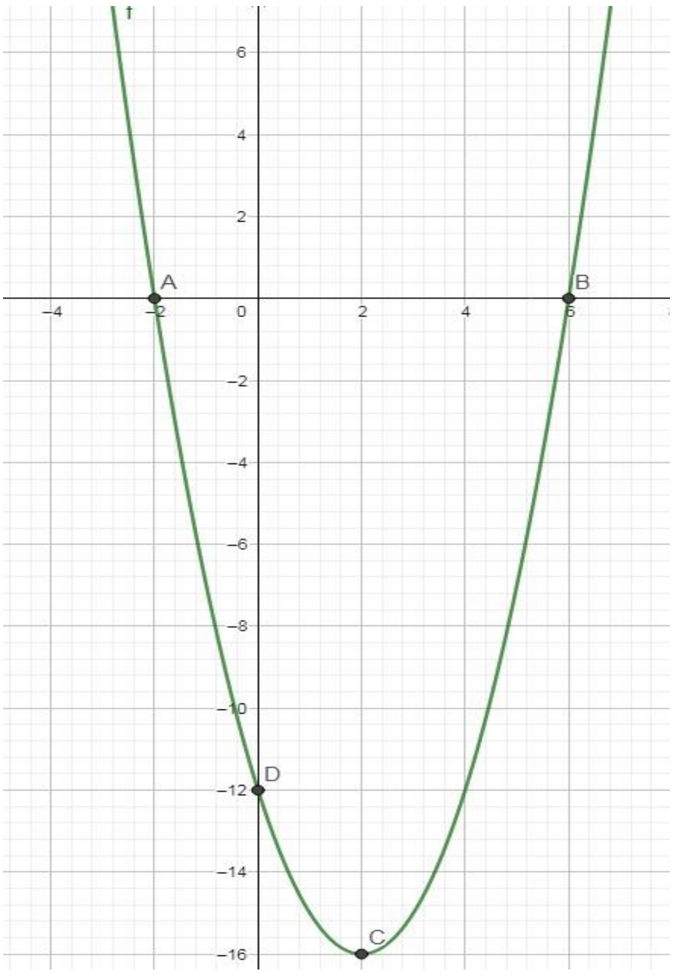
Punctul de extrem al graficului functiei este

Curba este simetrica fata de drepata $x = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1}$=\frac{4}{2}=2

Acum realizam tabelul de valori:

x	-∞	-2	0	2	6	+∞
f(x)		0	-12	-16	0	

Acum trasam graficul functiei:


f
6
4
2
A
B
−4
−2
0
2
4
6
−2
−4
−6
−8
−10
D
−12
−14
C
−16

Unităţi de măsură

Exerciţii

(2p) **1.** Transformaţi:

a) 210m = ….. hm;
b) 0,32dam = ….. cm;
c) 3000 mm^2 = …… cm^2;
d) 0,0019 km^2 = ….. m^2;
e) 356,7 dm^3 = ….. m^3.

(1p) **2.** Calculaţi aria unui pătrat care are perimetrul 48m.

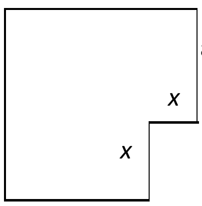
(1p) **3.** Un triunghi are semiperimetrul 13,5cm iar laturile sale sunt exprimate prin numere naturale consecutive. Aflaţi lungimile laturilor acestui triunghi.

(2p) **4.** Pe un panou pătrat cu latura de 9dm se lipesc timbre de formă dreptunghiulară cu lungimea 6cm şi lăţimea 3cm. Câte timbre sunt necesare pentru a umple panoul ?

(2p) **5.** Un acvariu are forma unui paralelipiped cu lungimea 0.8m, lăţimea 6dm şi înălţimea 50cm. a) Calculaţi volumul acvariului;

b) Dacă se toarnă 96 dm^3 de apă în acvariu, la ce înălţime se ridică apa ?

(1p) **6.** Ştiind că perimetrul figurii alăturate este 70m, aflaţi x şi aria figurii.



(1p) oficiu